

COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 15 FÉVRIER 1864.

PRÉSIDENCE DE M. MORIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. LE SECRÉTAIRE PERPÉTUEL met sous les yeux de l'Académie le XXXII^e volume des *Mémoires de l'Académie*, dont l'impression vient d'être terminée, et qui sera lundi prochain en distribution au Secrétariat.

GÉOMÉTRIE. — *Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions. Nombre des solutions dans chaque question ; par M. CHASLES* (*).

« En annonçant à l'Académie, dans la séance du 1^{er} février, le Mémoire que j'ai l'honneur de communiquer aujourd'hui, j'ai pris pour exemple des questions qu'il embrasse le cas où les coniques doivent toucher des courbes d'ordre quelconque, et en particulier des coniques données, parce que c'est principalement cette condition de tangence que l'on s'est proposée depuis quelques années. Mais les considérations qui font la base de cette théorie s'appliquent, comme je l'ai dit, à une foule d'autres questions, et celle des contacts est loin d'en être la plus ardue.

» En effet, toutes ces questions, qui impliquent des conditions différentes, exigent la connaissance simultanée de plusieurs propriétés des systèmes de

(*) L'Académie, sur la remarque faite par M. Chasles que cette Note dépasserait un peu en étendue les limites réglementaires et ne pourrait cependant être divisée sans nuire à la clarté, en a autorisé l'insertion dans l'état où elle a été présentée.

coniques qui satisfont à quatre conditions; et ces propriétés présentent parfois des difficultés dans l'application que l'on en fait, à raison des cas particuliers qui se rencontrent dans les coniques d'un système, cas où une conique est l'ensemble de deux droites, ou l'ensemble de deux points qui représentent les sommets d'une conique infiniment aplatie. La question du contact est bien sujette aussi à ces difficultés, si on se sert de certaines propriétés qui se sont sans doute offertes les premières à l'esprit; mais il est un théorème, qui s'applique au contact de courbes d'ordre quelconque, et qui est affranchi de ces difficultés; et il suffit seul pour conduire immédiatement au but; tellement que cette question des contacts, qui n'exige pas la connaissance d'autres théorèmes, devient la plus simple.

» Lorsqu'on connaît les propriétés des systèmes de sections coniques satisfaisant à quatre conditions données, dont on aura à se servir dans le cours d'une question, la marche à suivre est toujours la même.

» Ces propriétés, qu'il faut connaître, s'expriment toutes en fonction de deux quantités, disons de deux *éléments* de chaque système, lesquels sont toujours les mêmes d'espèce, et ne varient que numériquement. Ces deux éléments constants sont le nombre des coniques du système qui passent par un point quelconque, et le nombre des coniques qui touchent une droite. Ils dépendent des quatre conditions communes à tout le système; et c'est de ces éléments que dérivent les solutions de toutes les questions. Nous appellerons ces éléments les *caractéristiques* du système de coniques auquel ils appartiennent. Par exemple, dans le système de coniques qui passent toutes par quatre points, les caractéristiques sont 1 et 2, parce qu'une seule conique passe par un point donné, et qu'il en existe deux qui touchent une droite. Dans le système de coniques passant par trois points et tangentes à une conique, les caractéristiques sont 6 et 12, parce que six coniques passent par un point donné, et que douze coniques touchent une droite.

» Nous représenterons les deux caractéristiques d'un système par les lettres μ et ν . Désignant aussi les quatre conditions du système par Z, Z', Z'', Z''' , nous écrirons, pour exprimer que μ, ν en sont les caractéristiques,

$$(Z, Z', Z'', Z''') \equiv (\mu, \nu).$$

» La marche que nous suivrons dans la recherche du nombre des solutions d'une question déterminée par cinq conditions implique une construction théorique de la question. Mais on ne s'étonnera pas que la solution finale demande plusieurs constructions subsidiaires, qui résolvent successivement des questions d'un ordre différent.

» Une opération principale, dans le cours d'une solution, est la détermination des caractéristiques de divers systèmes que l'on a à considérer successivement. La manière de procéder dans cette recherche se renouvelle plusieurs fois, appliquée à des systèmes qui dérivent les uns des autres; il en résulte une certaine longueur de raisonnements, qu'il paraît difficile d'éviter.

» Avant de décrire ce procédé général de solution, nous allons faire connaître les propriétés des systèmes de coniques satisfaisant à quatre conditions. Ces propriétés impliquent dans leur expression les caractéristiques, et servent à les déterminer, ainsi que nous l'expliquerons; on en conclut ensuite le nombre des solutions de chaque question.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE CONIQUES (μ, ν) .

Lieux géométriques.

» I. *Le lieu des pôles d'une droite est une courbe d'ordre ν .*

» COROLLAIRE. Si la droite est à l'infini, le théorème prend cet énoncé :

» *Le lieu des centres des coniques est une courbe d'ordre ν .*

» II. Dans le cas où les coniques du système (μ, ν) passent toutes par deux points, en satisfaisant à deux autres conditions : *le lieu des pôles de la droite qui joint ces points est d'ordre $\frac{\nu}{2}$.*

» COROLLAIRE. Et si les deux points sont à l'infini : *le lieu des centres des coniques du système (μ, ν) est une courbe d'ordre $\frac{\nu}{2}$.*

» III. 1° *Si de deux points Q, Q' on mène des tangentes à chaque conique d'un système (μ, ν) , les points d'intersection de ces tangentes sont sur une courbe d'ordre 3ν , qui a deux points multiples d'ordre ν , en Q et Q'.*

» 2° *Si les coniques du système (μ, ν) sont toutes tangentes à la droite QQ', la courbe, lieu des points de rencontre des deux tangentes menées de Q et Q' à chaque conique, est d'ordre $(\frac{\mu}{2} + \nu)$, et a deux points multiples d'ordre $\frac{\mu}{2}$ en Q et Q'.*

» COROLLAIRES. Si Q et Q' sont imaginaires, à l'infini, sur un cercle, les points d'intersection des tangentes sont les foyers des coniques. Donc :

» 1° *Le lieu des foyers des coniques d'un système (μ, ν) est une courbe d'ordre 3ν , qui a deux points multiples d'ordre ν , à l'infini, sur un cercle.*

» 2° *Le lieu des foyers d'un système (μ, ν) de paraboles est une courbe d'ordre $(\frac{\mu}{2} + \nu)$ qui a deux points multiples d'ordre $\frac{\mu}{2}$ imaginaires, à l'infini, sur un cercle.*

» IV. Le lieu des points de concours des tangentes communes à une conique donnée U et à chaque conique d'un système (μ, ν) est une courbe d'ordre 3ν .

» V. Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P à toutes les coniques d'un système, est une courbe de l'ordre $(\mu + \nu)$, qui a un point multiple d'ordre μ en P .

» VI. Le lieu des points dont chacun a la même polaire dans une conique donnée U et dans une conique quelconque du système (μ, ν) est une courbe de l'ordre $(\mu + \nu)$.

» COROLLAIRE. Le nombre des coniques (μ, ν) qui touchent une conique quelconque U est $2(\mu + \nu)$.

» VII. Les tangentes communes à une conique donnée U et aux coniques d'un système (μ, ν) ont leurs points de contact avec ces coniques sur une courbe d'ordre $2(\mu + \nu)$, qui a $2(\mu + \nu)$ points de contact avec U .

» Ces $2(\mu + \nu)$ points sont les points de contact des coniques du système et de la conique U .

» VIII. Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point P sur les coniques du système (μ, ν) est une courbe d'ordre $(2\mu + \nu)$, qui a un point multiple d'ordre μ en P .

» IX. Le lieu des sommets des coniques du système (μ, ν) est une courbe de l'ordre $2(2\mu + \nu)$.

» X. Le lieu des points de rencontre des coniques du système (μ, ν) et de leurs diamètres qui aboutissent à un point fixe, est une courbe de l'ordre $(\mu + 2\nu)$.

» XI. Le lieu d'un point dont l'axe harmonique, relatif à une courbe d'ordre m , coïncide avec la polaire de ce point relative à une quelconque des coniques d'un système (μ, ν) , est une courbe de l'ordre $[\mu(m - 1) + \nu]$ (*).

» COROLLAIRE. Cette courbe rencontre la courbe d'ordre m en

(*) Ce théorème n'est point particulier aux coniques; il s'applique à des courbes d'ordre quelconque: c'est-à-dire que: *Lorsqu'on a un système de courbes d'ordre quelconque r déterminées toutes par $\frac{r(r+3)}{2} - 1$ conditions communes, et dont les caractéristiques sont μ et ν ; le lieu d'un point dont l'axe harmonique relatif à une courbe d'ordre m coïncide avec l'axe harmonique de ce point, relatif à une courbe quelconque du système, est une courbe de l'ordre $[\mu(m - 1) + \nu]$.*

On en conclut que le nombre des courbes du système, qui touchent une courbe d'ordre m , est $m[\mu(m - 1) + \nu]$.

Plusieurs autres propriétés d'un système de coniques s'appliquent pareillement à un système (μ, ν) de courbes d'ordre quelconque; et souvent la fonction des coefficients reste la

$m[\mu(m-1) + \nu]$ points, en chacun desquels une conique du système touche la courbe. Donc :

» Il existe dans un système de coniques (μ, ν) , $m[\mu(m-1) + \nu]$ coniques tangentes à une courbe donnée d'ordre m .

Courbes enveloppes.

» XII. Les polaires d'un point enveloppent une courbe de la classe μ .

» XIII. Lorsque toutes les coniques du système (μ, ν) sont tangentes à deux droites et satisfont à deux autres conditions : la courbe enveloppe des polaires du point de concours des deux droites est de l'ordre $\frac{\mu}{2}$.

» XIV. Les cordes que deux droites fixes interceptent dans toutes les coniques d'un système (μ, ν) enveloppent une courbe de la classe 3μ , qui a deux tangentes multiples d'ordre μ coïncidant avec les deux droites.

» XV. Les cordes communes à une conique U et à chaque conique d'un système (μ, ν) enveloppent une courbe de la classe 3μ .

» XVI. Les tangentes menées aux coniques (μ, ν) , par les points où elles coupent une droite donnée D , enveloppent une courbe de la classe $(\mu + \nu)$, qui a la droite D pour tangente multiple d'ordre ν .

» COROLLAIRE I. La courbe de la classe $(\mu + \nu)$ admet $(\mu + \nu)$ tangentes passant par un point quelconque. Prenant ce point à l'infini, sur une perpendiculaire à la droite D , on en conclut que :

» Le nombre des coniques d'un système (μ, ν) , qui coupent à angle droit une droite donnée, est $(\mu + \nu)$.

» COROLLAIRE II. Si la droite D est à l'infini, le théorème prend cet énoncé :

» Les asymptotes des coniques d'un système (μ, ν) enveloppent une courbe de la classe $(\mu + \nu)$, qui a une tangente multiple d'ordre ν à l'infini.

» Conséquemment la courbe a ν branches paraboliques.

» XVII. L'enveloppe des droites dont chacune a le même pôle dans une conique donnée U et dans une conique quelconque du système (μ, ν) , est une courbe de la classe $(\mu + \nu)$.

» Cette courbe a $2(\mu + \nu)$ tangentes communes avec U ; et les $2(\mu + \nu)$

même, comme dans le cas actuel et dans les théorèmes I, V, VIII, XVI, XXII. C'est pour cela que j'ai annoncé que ces recherches, concernant les coniques, seraient un point de départ utile dans la théorie générale des courbes d'ordre supérieur.

points de contact sur U sont les points où $2(\mu + \nu)$ coniques du système touchent la conique U .

» XVIII. Si par les points où une conique U rencontre chaque conique d'un système (μ, ν) , on mène les tangentes de celles-ci, ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $2(\mu + \nu)$ qui a $2(\mu + \nu)$ points de contact avec U .

» Ces $2(\mu + \nu)$ points déterminent $2(\mu + \nu)$ coniques du système tangentes à U en ces points.

» XIX. Les axes des coniques d'un système (μ, ν) enveloppent une courbe de la classe $(\mu + \nu)$, qui a une tangente multiple d'ordre ν , à l'infini.

» XX. Lorsqu'un axe de chaque conique d'un système (μ, ν) , satisfaisant à trois autres conditions, passe par un point fixe, la courbe enveloppe des autres axes est de la classe 2ν .

» XXI. Les diamètres d'un système de coniques (μ, ν) , qui rencontrent ces courbes sur une droite donnée, enveloppent une courbe de la classe $(\mu + \nu)$, qui a cette droite pour tangente multiple d'ordre ν .

» XXII. Les normales des coniques d'un système (μ, ν) aux points de ces courbes situés sur une droite donnée, enveloppent une courbe de la classe $(2\mu + \nu)$, qui a cette droite pour tangente multiple d'ordre $(\mu + \nu)$.

» XXIII. Si dans chaque conique d'un système (μ, ν) on mène deux diamètres rectangulaires, dont l'un passe par un point fixe, l'autre diamètre enveloppe une courbe de la classe $(\mu + \nu)$, qui a une tangente multiple d'ordre ν , à l'infini.

» XXIV. Les diamètres dont les conjugués passent par un point donné enveloppent une courbe de la classe $(\mu + \nu)$, qui a une tangente multiple d'ordre ν , à l'infini.

» XXV. Les directrices d'un système de coniques (μ, ν) enveloppent une courbe de la classe $(2\mu + \nu)$, qui a une tangente multiple d'ordre ν , à l'infini.

» XXVI. Dans un système de coniques (μ, ν) , dont une directrice passe par un point donné, et qui satisfont à trois conditions communes, les autres directrices enveloppent une courbe de la classe $(\mu + \nu)$, qui a une tangente multiple d'ordre ν , à l'infini.

» XXVII. Lorsqu'on a une courbe géométrique de la classe n , et une droite D , si de chaque point de la droite on mène les n tangentes de la courbe, et l'axe harmonique de la droite D relatif à ce faisceau de tangentes, cet axe passe toujours par un même point I que nous appellerons le pôle harmonique de la droite D (*).

(*) Voir *Aperçu historique*, p. 623. — *Traité de Géométrie supérieure*; art. 496.

» Cela posé :

» *Lorsqu'on a un système de coniques (μ, ν) et une courbe U' de la classe n , l'enveloppe d'une droite variable, qui a un même pôle harmonique dans la courbe U' et dans chaque conique du système, est une courbe de la classe $[\mu + (n - 1)\nu]$.*

» COROLLAIRE. Cette courbe a $n[\mu + (n - 1)\nu]$ tangentes communes avec la courbe U' , en chacune desquelles une conique du système touche la courbe U' . Conséquemment :

» *Il existe $n[\mu + (n - 1)\nu]$ coniques tangentes à une courbe de la classe n .*

» Cette formule n'est pas différente au fond de celle du théorème (XI).

Propriétés diverses d'un système (μ, ν) .

» XXVIII. 1° *Dans un système de coniques (μ, ν) , le nombre de ces courbes qui divisent un segment donné, en rapport harmonique, est μ .*

» COROLLAIRE I. *Dans un système de coniques (μ, ν) , il existe μ hyperboles équilatères.*

» COROLLAIRE II. *Un faisceau de coniques étant donné, ainsi qu'un système de coniques (μ, ν) , il existe dans ce système μ coniques homothétiques, respectivement, à μ coniques du faisceau.*

» 2° *Le nombre des coniques par rapport auxquelles deux droites données sont conjuguées, est ν .*

» XXIX. 1° *Dans un système de coniques (μ, ν) , le nombre des coniques semblables à une conique donnée (autre que le cercle et l'hyperbole équilatère), est 2μ .*

» 2° *Le nombre des coniques dont les tangentes menées par un point fixe donné font entre elles un angle donné, est 2ν .*

» *Et ce nombre est ν quand l'angle est droit.*

» XXX. 1° *Dans un système de coniques, la condition que les courbes coupent un segment donné en rapport harmonique équivaut à la condition de passer par un point.*

» *C'est-à-dire que, si, dans un système, on change la condition de passer par un point, en celle de diviser un segment donné harmoniquement, les caractéristiques du système restent les mêmes.*

» 2° *La condition que, dans les coniques d'un système, deux droites données soient conjuguées par rapport à toutes les coniques du système, équivaut à celle que les coniques soient toutes tangentes à une droite.*

» *C'est-à-dire que, si l'on remplace la condition de toucher une droite, par la condition que deux droites données soient conjuguées relativement à*

toutes les coniques d'un système, les caractéristiques du système ne changent pas.

» XXXI. *La condition d'avoir un foyer en un point donné équivaut à celle de toucher deux droites.*

Application de la méthode.

» *Trouver les caractéristiques μ, ν d'un système de coniques satisfaisant à quatre conditions Z, Z', Z'', Z''' .*

» On entre en matière avec les cinq formules suivantes, qui expriment les caractéristiques des cinq systèmes de coniques passant par des points et tangentes à des droites :

- | | | |
|-----|--------------|------------------|
| (1) | (4 p.) | $\equiv (1, 2),$ |
| (2) | (3 p., 1 d.) | $\equiv (2, 4),$ |
| (3) | (2 p., 2 d.) | $\equiv (4, 4),$ |
| (4) | (1 p., 2 d.) | $\equiv (4, 2),$ |
| (5) | (4 d.) | $\equiv (2, 1).$ |

Ces formules servent à calculer les caractéristiques des systèmes

- (a) (3 p., Z), (2 p., 1 d. Z), (1 p., 2 d. Z), (3 d. Z).

» Ensuite, connaissant les caractéristiques de ces quatre systèmes, on introduit la seconde condition Z' , et on calcule les caractéristiques des systèmes

- (b) (2 p., Z, Z'), (1 p., 1 d., Z, Z'), (2 d., Z, Z').

» Ces trois systèmes servent de même à introduire la troisième condition Z'' , et à calculer les caractéristiques des deux systèmes

- (c) (1 p., Z, Z', Z''), (1 d., Z, Z', Z'').

» Enfin, de ces deux systèmes, on conclut les caractéristiques du système final

$$(Z, Z', Z'', Z''').$$

» Les caractéristiques de ce système servent à déterminer le nombre des coniques qui satisfont à une cinquième condition.

» Prenons pour exemple les conditions suivantes ;

» Z. *Toucher une courbe d'ordre m.*

» Z' Avoir un foyer sur une courbe d'ordre p .

» Z'' Être semblable à une conique donnée U .

» Z''' Qu'une directrice soit tangente à une courbe de la classe q .

» La première opération est le calcul des caractéristiques du premier des quatre systèmes (a); ces caractéristiques sont les nombres des coniques qui, dans les deux systèmes (1) et (2), satisfont à la condition Z . Car si N coniques du système (1), dont toutes les coniques passent par quatre points, satisfont à la condition Z ; réciproquement, N coniques, dans le système ($3p., Z$), passent par un quatrième point pris arbitrairement. Donc N est la caractéristique μ de ce système. Pareillement, le nombre N' des coniques qui, dans le système (2), touchent une droite, exprime la caractéristique ν du système ($3p., Z$).

» La condition Z est de toucher une courbe d'ordre m, Z_m ; on a donc, d'après le théorème (XI, Coroll.),

$$N(4p., Z_m) = m(m+1),$$

$$N'(3p., 1d., Z_m) = 2m(m+1).$$

» Donc

$$(6) \quad (3p., Z_m) \equiv [m(m+1), 2m(m+1)].$$

» On détermine semblablement les caractéristiques du système ($2p., 1d., Z_m$) au moyen des formules (2) et (3); celles de ($1p., 2d., Z_m$), au moyen de (3) et (4); et enfin celles de ($3d., Z_m$), au moyen de (4) et (5). On a ainsi :

$$(7) \quad (2p., 1d., Z_m) \equiv [2m(m+1), 4m^2];$$

$$(8) \quad (1p., 2d., Z_m) \equiv [4m^2, 2m(2m-1)];$$

$$(9) \quad (3d., Z_m) \equiv [2m(2m-1), m(2m-1)].$$

» Les coniques, pour seconde condition, doivent avoir un foyer sur une courbe d'ordre p, Z'_p .

» Il faut calculer les caractéristiques des trois systèmes (b). Celles du premier système ($2p., Z_m, Z'_p$) sont les nombres $N(3p., Z_m, Z'_p), N'(2p., 1d., Z_m, Z'_p)$. Ces nombres se concluent du théorème (III, Coroll., 1^o) appliqué aux systèmes (6) et (7). On a

$$N = 2 \cdot 3m(m+1) \cdot p,$$

$$N' = 3 \cdot 4m^2 p.$$

Donc

$$(10) \quad (2p., Z_m, Z'_p) \equiv [2 \cdot 3 \cdot m(m+1)p, 3 \cdot 4 \cdot m^2 p].$$

» Les caractéristiques du système (1p., 1d., Z_m, Z'_p) sont les nombres $N(2p., 1d., Z_m, Z'_p)$, $N'(1p., 2d., Z_m, Z'_p)$, qui se concluent du même théorème (III) appliqué aux deux systèmes (7) et (8) : le premier, déjà calculé, est

$$N = 3 \cdot 4 \cdot m^2 p;$$

et le second,

$$N' = 2 \cdot 3 m(2m-1)p.$$

Donc

$$(11) \quad (1p., 1d., Z_m, Z'_p) \equiv [3 \cdot 4 \cdot m^2 \cdot p, 2 \cdot 3 \cdot m(2m-1)p].$$

» Les caractéristiques du système (2d., Z_m, Z'_p) sont les nombres $N(1p., 2d., Z_m, Z'_p)$, $N'(3d., Z_m, Z'_p)$: le premier vient d'être calculé; le second se conclut du théorème (III) appliqué au système (9). On a

$$N = 2 \cdot 3 \cdot m(2m-1)p,$$

$$N' = 3 \cdot m(2m-1)p.$$

Donc

$$(12) \quad (2d., Z_m, Z'_p) \equiv [2 \cdot 3 \cdot m(2m-1)p, 3m(2m-1)p].$$

» Passons à la troisième condition, et à la détermination des caractéristiques des deux systèmes (c). Les coniques doivent être semblables à une conique Z'' . D'après le théorème (XXIX) appliqué aux deux systèmes (10) et (11), on a

$$N(2p., Z_m, Z'_p, Z'') = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m(m+1)p,$$

et

$$N'(1p., 1d., Z_m, Z'_p, Z'') = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^2 \cdot p.$$

Donc

$$(13) \quad (1p., Z_m, Z'_p, Z'') \equiv [2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m(m+1)p, 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^2 p].$$

» Appliquant le même théorème aux systèmes (11) et (12), on obtient :

$$N(1p., 1d., Z_m, Z'_p, Z'') = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^2 p,$$

$$N'(2d., Z_m, Z'_p, Z'') = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m(2m-1)p.$$

Donc

$$(14) \quad (id., Z_m, Z'_p, Z'') \equiv [2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^2 p, 2 \cdot 3 \cdot m(2m-1)p].$$

» La quatrième condition est qu'une directrice de chaque conique soit tangente à une courbe de la classe q . On cherche combien de coniques satisfont à cette condition dans les deux systèmes (13) et (14). Pour cela, on se sert du théorème (XXV), et l'on obtient

$$N(ip., Z_m, Z'_p, Z'', Z'''_q) = [2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m \cdot (m+1)p + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^2 p]q,$$

$$N'(id., Z_m, Z'_p, Z'', Z'''_{q'}) = [(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^2 p + 2 \cdot 3 \cdot m(2m-1)p]q.$$

On a donc

$$(Z_m, Z_p, Z'', Z'''_q) \equiv [24 \cdot mpq(2m-1), 6 \cdot mpq(10m-1)].$$

Telles sont les caractéristiques du système proposé.

» On s'en servira pour déterminer immédiatement le nombre des coniques qui satisfont à une cinquième condition.

» Demande-t-on, par exemple, que les coniques aient leurs centres sur une courbe donnée d'ordre r : leur nombre sera, d'après le théorème (I, Coroll.),

$$6 \cdot mpqr(10m-1).$$

» *Observation.* — Si, au lieu de demander qu'une directrice soit tangente à une courbe d'ordre r , on veut que la normale d'une conique du système, en un point (indéterminé) où cette conique coupe une droite donnée, soit tangente à une courbe d'ordre r , le nombre des solutions restera le même; et pareillement, si, au lieu de cette condition, on demande que la normale, en un des points où une conique coupe une courbe d'ordre r , passe par un point donné. Cette égalité du nombre des solutions pour trois conditions différentes résulte de l'expression $(2\mu + \nu)$ qui se reproduit dans les théorèmes (VIII, XXII, XXV).

» Ajoutons enfin que si, au lieu de ces conditions, on demandait que les courbes eussent un sommet sur une courbe d'ordre r , le nombre des solutions serait doublé en vertu du théorème (IX).

» Il est beaucoup de questions où entrent des conditions différentes, et qui, néanmoins, ont un même nombre de solutions.

» La première condition, dans la question que nous venons de prendre pour exemple de la méthode, a été que les coniques soient tangentes à une courbe d'ordre m . Si l'on demande qu'elles soient tangentes aussi à

d'autres courbes d'ordre quelconque, la marche que nous venons de décrire reste absolument la même, et il suffit toujours d'appliquer le seul théorème (XI). On arrive ainsi, sans aucune difficulté, aux formules contenues dans ma précédente communication (*).

» Je n'ai pas parlé des conditions de double contact, ou de contact d'ordre supérieur, des coniques demandées avec d'autres coniques. Ces questions seront le sujet d'un autre Mémoire.

GÉOLOGIE. — *Tableau des données numériques qui fixent les 362 points principaux du réseau pentagonal; par M. L. ELIE DE BEAUMONT.*

« Les grands cercles qui constituent le *réseau pentagonal* se croisent sur la surface du globe en un grand nombre de points dont quelques-uns présentent, avec l'ensemble du réseau, des rapports assez symétriques pour mériter d'en être appelés les *points principaux*.

» En fixant par des nombres la position de ces *points principaux*, on établit les bases les plus naturelles auxquelles on puisse se rattacher pour tracer le réseau lui-même sur des globes ou sur des cartes, et pour le comparer aux données de la géographie et de la géologie.

» Les 15 cercles primitifs du réseau pentagonal divisent la surface de la sphère en 120 triangles rectangles scalènes, égaux et symétriques deux à deux, dont les trois angles sont respectivement de 36, de 60 et de 90 degrés (1). Ces 120 triangles, qui embrassent la surface entière de la sphère, y sont juxtaposés de manière que leur contact s'opère par des côtés égaux

(*) M. de Jonquières était parvenu, il y a longtemps, à ces formules de contact, qu'il m'a communiquées le 17 février 1859. Je ne m'étais point occupé alors de ces questions, et ma réponse, sans infirmer ni justifier les formules, fut simplement qu'elles n'étaient pas démontrées. C'était en effet par des inductions, soit théoriques, soit pratiques et numériques, que le savant géomètre y était conduit. Plus tard, à défaut de démonstration, il douta de leur exactitude, parce qu'elles différaient de la formule de M. Bischoff, qui lui paraissait confirmée par un résultat de M. Steiner (ou plutôt, je crois, une conjecture hypothétique de l'illustre géomètre dont nous déplorons la perte), et il chercha alors à démontrer cette formule. (Avril 1861.)

Ce n'est que bien plus tard que je me suis occupé des questions qui font le sujet du présent Mémoire. Celle du contact des courbes d'ordre quelconque y tient sa place; mais elle n'est qu'une des nombreuses applications de la méthode générale que je viens d'exposer; et cette application repose sur une propriété des courbes d'ordre quelconque (théor. XI), qui n'était point connue.

(1) *Notice sur les systèmes de montagnes* (in-18, Paris; Bertrand, 1852, p. 899).